УДК 530.1

*А. А. Зайцев, Д. А. Каргаполов*

# НОВАЯ ПРОЦЕДУРА ПОЛУЧЕНИЯ МНОГОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КдВ

*Предложен новый способ получения многосолитонных решений уравнения КдВ. С этой целью вводится характеристический многочлен и изучаются его свойства. Для многосолитонных решений получено представление через вторую логарифмическую производную от определителя положительно определенной матрицы.*

*The article offers a new method of obtaining multisoliton solutions of KdV equations by means of introducing the characteristic polynomial. The authors form a representation for multisoliton solutions through the second logarithmic derivative of a determinant of a positive-definite matrix.*

**Ключевые слова:** многосолитонные решения уравнения КдВ, пара Лакса, нормализованный многочлен.

**Keywords:** multisoliton solutions, KdV equations, Lax pair, normalised polynomial.

Первоначально многосолитонные решения уравнения КдВ были получены методом обратной задачи рассеяния [1—7]. Позже процедура получения этих решений была существенно упрощена благодаря применению техники преобразования Дарбу [8—10]. Здесь предлагается новая процедура, основы которой изложены в статье [11].

Как известно [1—10], пара Лакса для уравнения КдВ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0\,,\ u = u(x,t) \tag{1}$$

имеет вид

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi\,,\ \psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi\,,\ \psi = \psi(x,t,\lambda)\,. \tag{2}$$

Рассмотрим решение системы (2) вида

$$\psi = p(ik,x,t)\exp\left(ikx + 4ik^3t\right),\ \lambda = k^2\,, \tag{3}$$

где $p(ik,x,t)$ — многочлен от $ik$ с коэффициентами, зависящими от $x$ и $t$; далее его будем записывать коротко $p(ik)$, подразумевая зависимость от $x$, $t$. После подстановки представления (3) в уравнения (2) получаем следующую систему для $p(ik)$:

$$-p_{xx}(ik) - 2ikp_x(ik) + up(ik) = 0\,, \tag{4}$$

$$p_t(ik) - \left(2u + 4k^2\right)p_x(ik) - \left(2uik - u_x\right)p(ik) = 0\,. \tag{5}$$

Многочлен $p(ik)$ в представлении (3) не единственен. Однако справедливо

**Утверждение 1.** Пусть $u$ — фиксированное многосолитонное решение уравнение КдВ. Тогда во множестве всех многочленов $p(ik)$, для которых функция (3) будет решением системы (2), существует единственный многочлен $p_n(ik)$ наименьшей степени, старший коэффициент которого равен 1. Любой другой многочлен выражается через него следующим образом:

$$p(ik) = p_0(ik) p_n(ik),$$

где $p_0(ik)$ — многочлен с постоянными коэффициентами.

Многочлен $p_n(ik)$ называется нормализованным. Далее индекс $n$ опускается.

Основную роль в нашей процедуре выполняет следующая функция:

$$W(k) = (-2ik)^{-1} \begin{vmatrix} p(ik) & p(-ik) \\ p_x(ik) + ikp(ik) & p_x(-ik) - ikp(-ik) \end{vmatrix} =$$

$$= \left( p_x(ik)p(-ik) - p(ik)p_x(-ik) \right)\left(2ik + p(ik)p(-ik)\right). \tag{6}$$

**Утверждение 2.** Функция $W(k)$ является четным многочленом от $k$ с действительными коэффициентами, не зависящими от $x$ и $t$. Его корни простые, чисто мнимые и, следовательно, распадаются на пары ($\pm ib_j$).

Для доказательства достаточно вычислить обе частные производные $W$ с помощью уравнений (4) и (5) и второй пары, полученных из первой заменой $ik$ на $-ik$. Тогда получим $W_x = W_t = 0$.

Многочлен $W(k)$ назовем характеристическим. В случае $n$-солитонного решения его степень равна $2n$ и он факторизуется следующим образом:

$W(k) = W_+(k) W_-(k)$, где $W_+(k) = \prod_{m=1}^{n} (k - ib_m)$, $W_-(k) = \prod_{m=1}^{n} (k + ib_m)$, $b_m > 0$.

Степени многочленов $p(ik)$ и $W_-(k)$ равны $n$, поэтому справедливо следующее разложение на простые дроби:

$$(-i)^n \frac{p(ik)}{W_-(k)} = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{-ik + b_j}, \tag{7}$$

где

$$p_j = (-1)^{n-1} \frac{p(b_j)}{W'_-(-ib_j)}. \tag{8}$$

Можно показать, что $p_j$ является вещественной функцией от $x$ и $t$.

**Утверждение 3.** Существует действительная константа $a_j$ такая, что выполнено соотношение

$$p(-b_j) = a_j \exp\left(2b_j x - 8b_j^3 t\right) p_j. \tag{9}$$

**Доказательство.** Вещественность $p(-b_j)$ следует из того, что коэффициенты многочлена $p(ik)$ являются вещественными функциями. Полагая в формуле (6) $k = ib_j$ и учитывая равенства (8) и $W(ib_j) = 0$, получим

$$W(ib_j) = (-i)^{n-1} \frac{1}{W'_-(-ib_j)} \begin{vmatrix} p(-b_j) & p_j \\ p_x(-b_j) - b_j p(-b_j) & p_{j,x} + b_j p_j \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что первый столбец определителя пропорционален второму, то есть существует функция $R_j = R_j(x,t)$ такая, что

$$p(-b_j) = R_j p_j\,,\;\; p_x(-b_j) - b_j p(-b_j) = R_j\left(p_{j,x} + b_j p_{j,x}\right).$$

Если первое из этих равенств подставить во второе, то получим уравнение

$$R_{j,x} - 2b_j R_j = 0\,. \tag{10}$$

Полагая в уравнении (5) $k=ib_j$, приходим к выводу, что функция $p(-b_j)$ удовлетворяет уравнению

$$p_t(-b_j) - \left(2u - 4b_j^2\right)p_x(-b_j) + \left(2b_j u + u_x\right)p(-b_j) = 0\,.$$

После подстановки сюда равенства $p(-b_j)=R_j p_j$ и необходимых упрощений получаем второе уравнение для функции $R_j$:

$$R_{j,t} + 8b_j^3 R_j = 0\,. \tag{11}$$

Общее решение уравнений (10) и (11) дается формулой $R_j=a_j\exp(-2b_j x+8b_j^3 t)$, откуда следует равенство (9).

Переходим к процедуре вывода системы уравнений для функций $p_m(x)$, $m=\overline{1,n}$. Для этого в тождестве (7) полагаем $k=ib_m$, учитываем равенство (9) и обозначаем $\exp(-2b_m x_m) = (-i)^n \dfrac{a_m}{W_-(ib_m)}$. Тогда получим следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\exp\left(2b_m\left(x - 4b_m^2 t - x_m\right)\right)\delta_{mj} + \frac{1}{b_m + b_j}\right)p_j = 1\,.$$

Ее решение получается с помощью формул Крамера и имеет вид

$$p_m = \frac{w_m}{w}\,,$$

где

$$w = \det\left(\exp\left(2b_m\left(x - 4b_m^2 t - x_m\right)\right)\delta_{mj} + \frac{1}{b_m + b_j}\right), \tag{13}$$

а $w_m$ — определитель, который получается из определителя $w$ заменой его $m$-го столбца на столбец из единиц.

Подставляя разложение (7) в уравнение (5), получаем, что функции $p_m$ удовлетворяют уравнениям $p_{m,xx} + 2b_m p_{m,x} - up_m = 0$, а многосолитонное решение выражается через эти функции по формуле

$$u = 2\sum_{m=1}^{n} p_{m,x}\,. \tag{14}$$

Покажем, наконец, что $u$ выражается через вторую логарифмическую производную детерминанта $w$.

**Утверждение 4.** Справедливо тождество

$$w_x = 2bw - \sum_{m=1}^{n} w_m\,,\;\; b = \sum_{m=1}^{n} b_m\,. \tag{15}$$

Для доказательства справедливости утверждения вводится вспомогательная функция $v$=exp(–2$bx$)$w$. Тогда $v_x$=exp(–2$bx$)($w'$–2$bw$). С другой стороны, записывая ее в виде определителя и пользуясь правилом дифференцирования функционального определителя, получаем $v_x = \sum_{j=1}^{n} v_{j,x} = -\exp(-2bx)\sum_{j=1}^{n} w_j$. Сравнение обоих выражений для $v_x$ дает тождество (15).

Из формул (12) и (15) следует

$$\sum_{m=1}^{n} p_m = \frac{1}{w}\sum_{m=1}^{n} w_m = \frac{1}{w}(-w_x + 2bw) = -(\ln w)_x + 2b.$$

Подстановка этого равенства в формулу (14) дает нужное представление для многосолитонных решений уравнения КдВ $u = -2(\ln w)_{xx}$, где $w$ есть определитель (13).

Отметим одну особенность полученного представления для многосолитонных решений уравнения КдВ: функция $w$ является определителем положительно определенной матрицы (при $b_m$>0 и действительных $x_m$), поэтому $w$>0.

Рассмотрим примеры.

При $n$=1 имеем $w$=exp(2$b$($x$–4$b^2t$–$x_1$))+1/2$b$, откуда

$$u = -\frac{2b^2}{ch^2\left(b\left(x - 4b^2t - x_0\right)\right)}, \quad x_0 = x_1 - \ln(2b).$$

Это известный солитон КдВ.

При $n$=2 имеем $w = E_1E_2 + E_1/2b_2 + E_2/2b_1 + (b_1 - b_2)^2/4b_1b_2(b_1 + b_2)^2$, где $E_k = \exp\left(2b_k\left(x - 4b_k^2t - x_k\right)\right)$, $k = 1,2$. Это выражение преобразуется к более простому

$$w = ch\left((b_1 + b_2)(x - 4c_1t - a_1)\right) + (b_1 + b_2)ch\left((b_1 - b_2)(x - 4c_2t - a_2)\right)/(b_1 - b_2),$$

где $c_1=b_1^2-b_1b_2+b_2^2$, $c_2=b_1^2+b_1b_2+b_2^2$ и константы $a_1$, $a_2$ выражаются через $x_1$, $x_2$.

Аналогичные упрощения достигаются и при $n$≥3.

## Заключение

В работе предложен новый способ получения многосолитонных решений уравнения КдВ. Для этого вводится характеристический многочлен и изучаются его свойства. Получена система линейных уравнений для собственных функций оператора Шредингера, которая решена с помощью формул Крамера. В результате для многосолитонных решений получено представление через вторую логарифмическую производную от определителя положительно определенной матрицы. Новый способ проще известных (метод обратной задачи, преобразования Дарбу и Хироты), столь же универсальный и его можно использовать для решения других уравнений теории солитонов.

## Список литературы

1. *Захаров В. Е., Манаков С. В. и др.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М., 1980.

2. *Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
3. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М., 1983.
4. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
5. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений. М., 1985.
6. *Додд Р., Эйлбек Дж. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988.
7. *Зайцев А.А., Лебле С.Б.* Теория нелинейных волн: Учеб. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984.
8. *Darboux G.* Sur une proposition relative aux equation lineaires // Compt. Rend. 1882. Vol. 94. P. 1456—1459.
9. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin; Heidelberg, 1991.
10. *Юров А.В.* Преобразование Дарбу в квантовой механике: Учеб. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1998.
11. *Зайцев А.А., Каргаполов Д.А.* Конструирование баргмановских гамильтонианов матричного уравнения Шредингера // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Калининград, 2008. Вып. 4. С. 20—25.

**Об авторах**

А.А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., РГУ им. И. Канта.
Д.А. Каргаполов — асп., РГУ им. И. Канта, Dmitry_AK@mail.ru.

**Authors**

A. Zaytsev — Dr, IKSUR.
D. Kargapolov — PhD student, IKSUR.